ADVANCES IN APPLIED MATHEMATICS **17**, 1–26 (1996)
ARTICLE NO. 0001

Une Famille de Polynomes Qui Interpole Plusieurs Suites Classiques de Nombres

Arthur Randrianarivony and Jiang Zeng*

Departement de Mathematiques, Universite Louis-Pasteur, 7, rue Rene Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France

We give a common polynomial extension of the Euler numbers, Genocchi numbers, Eulerian polynomials, the recent median Euler numbers. We first study some general algebraic properties of these polynomials, which include the continued fraction expansion of its ordinary generating function and, by establishing the connection with a generating function of some staircases introduced by Dumont, we get several combinatorial interpretations of these polynomials and then several new combinatorial interpretations of the above classical numbers. Finally, we study also a similar extension of Springer numbers. © 1996 Academic Press, Inc.

1. INTRODUCTION

Le présent travail prend sa source dans l'article original de Gandhi [Ga] qui, dans les années soixante-dix, avait conjecturé une expression pour les *nombres de Genocchi* (G_{2n}) $(n \geq 1)$ comme spécialisation des polynômes à coefficients entiers $(K_n(x))$ $(n \geq 1)$ définis par l'équation aux différences finies

$$\begin{aligned} K_1(x) &= x^2, \\ K_n(x) &= x^2 (K_{n-1}(x+1) - K_{n-1}(x)) \qquad (n \geq 2). \end{aligned} \tag{1.1}$$

La conjecture, qui s'exprima par $K_n(1) = G_{2n+2}$ $(n \geq 1)$ et qui fut immédiatement démontrée par Riordan et Stein [Ri-St], d'une part, et Carlitz [Ca1], d'autre part, a été la source de l'étude algébrique et combinatoire des nombres de Genocchi. On doit à Dumont [Du1] les premiers travaux sur cette étude combinatoire. Celle-ci a permis d'introduire de nouveaux objets géométriques, comme les *escaliers* (voir la définition ci-après) qui se

* Avec le concours du programme des Communautés Européennes en Combinatoire Algébrique, 1994–1995.

0196-8858/96 $18.00

sont avérés être fondamentaux à la fois pour les études combinatoires de cette suite de nombres et de leurs dérivés (cf. [Du-Fo, Vi, Ha, Du-Ra]), et pour le calcul algébrique de plusieurs polynômes qui leur sont attachés. En particulier, le modèle combinatoire a inspiré directement l'expression analytique du *développement en fraction continue* des fonctions génératrices de ces nombres, des polynômes $K_n(x)$ et de plusieurs autres familles de polynômes attachés à des suites classiques de nombres.

Le but de cet article est de proposer une *globalisation* de certains résultats obtenus en introduisant une nouvelle suite de polynômes à plusieurs variables $(Q_n(x,y,z))$ $(n \geq 0)$, et en montrant que leur étude algébrique et combinatoire couvre plusieurs résultats récents sur les *nombres de Genocchi* et leurs polynômes dérivés $B_n(x,y)$, les polynômes Eulériens $A_n(x,y)$, les polynômes $C_n(x,y)$ attachés aux nombres d'Euler E_n, les polynômes $D_n(x)$ liés aux nombres d'Euler médians et $S_n(x)$ associés aux nombres de Springer. Ces polynômes $Q_n(x,y,z)$ $(n \geq 0)$ sont définis par la récurrence:

$$\begin{aligned} Q_0(x,y,z) &= 1, \\ Q_n(x,y,z) &= xz\, Q_{n-1}(x+1,y,z+1) - x(z-y)Q_{n-1}(x,y,z). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Comparant (1.2) à (1.1) on pourra constater que la seconde récurrence s'inspire directement de la première et en effet $K_n(x) = xQ_n(x,1,x+1)$ $(n \geq 1)$. D'un point de vue analytique les polynômes précédents s'expriment dans l'algèbre des polynômes Q_n comme:

$$\begin{aligned} A_n(x,y) &= \text{la somme des termes du plus haut degré de } yQ_n(x,1,y+1), \\ B_n(x,y) &= x^{-1}Q_n(x,1,y+1), \\ C_n(x,y) &= 2^{2n}Q_n(x/2,1/2,(y+1)/2), \\ D_n(x) &= 2^{2n}Q_n((x+1)/2,1/2,x/2+1), \end{aligned} \tag{1.3}$$

quant à la suite des polynômes $S_n(x)$, elle apparait comme la suite initiale de la matrice de Seidel lorsqu'on prend $(2^{2n}D_n(x))$ comme suite finale.

A partir de la relation (1.2) on peut aisément obtenir une expression pour la fonction génératrice ordinaire des polynômes Q_n (voir paragraphe 2), puis à l'aide d'un lemme de Wall [Wa] calculer explicitement le développement en fraction continue de cette fonction génératrice (voir Théorème 3).

Par ailleurs, Dumont [Du3] a défini une suite de plynômes à six variables $\Gamma_n(x,y,z,\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ $(n \geq 1)$ comme générateurs d'une statistique *multivariée* sur les *escaliers* d'ordre n, les escaliers sont simplement définis comme des applications surjectives f de $[2n] = \{1,2,\ldots,2n\}$ sur l'ensemble $\{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$ telles que pour tout $k \in [2n]$ on ait $f(k) \geq k$. La définition de cette satistique sera donnée au paragraphe 2. On doit à Dumont [Du3] d'avoir conjecturé que la fonction génératrice des Γ_n admettait le développement en fraction continue suivant:

$$\sum_{n \geq 1} \Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) t^n$$
$$= \cfrac{t}{1 - (x\bar{y} + y\bar{z} + z\bar{x})t - \cfrac{(\bar{x} + y)(\bar{y} + z)(\bar{z} + x)t^2}{\ddots}} \tag{1.4}$$

où les coefficients sous le $(n+1)$-ième trait de fraction est

$$1 - [(x+n)(\bar{y}+n) + (y+n)(\bar{z}+n) + (z+n)(\bar{x}+n) - n(n+1)]t$$
$$- \frac{(n+1)(\bar{x}+y+n)(\bar{y}+z+n)(\bar{z}+x+n)t^2}{\ddots}$$

un résultat qui a été prouvé par Randrianarivony [Ra] et Zeng [Ze] par deux méthodes différentes. Nous établissons ici la relation

$$Q_n(x, y, z) = \Gamma_{n+1}(z, 0, y, x, 0, 0).$$

Ce qui permet de fournir une *interprétation combinatoire* des polynômes Q_n en termes d'escaliers. Tous ces résultats sont consignés dans le paragraphe 2.

Le reste de l'article est consacré à l'étude des diverses spécialisations des polynômes Q_n. Dans l'étude des polynômes Euleriens (paragraphe 3), nous obtenons de *nouvelles interprétations combinatoires* pour ces polynômes d'abord en termes d'escaliers (cf. Proposition 9), ensuite en termes d'applications *injectives* (cf. Proposition 10). Nous redémontrons ensuite un résultat de Dumont [Du2] sur l'interprétation des polynômes $A_n(x, y)$ en termes de générateurs d'*involutions bipartites*, en construisant une bijection entre ce dernier modèle et celui des escaliers (cf. Proposition 12).

Dans le paragraphe 4 nous retrouvons les résultats de Dumont et Randrianarivony [Du-Ra] sur les polynômes $B_n(x, y)$ et établissons deux autres interprétations combinatoires. Quant aux polynômes $C_n(x, y)$ dont le développement en fraction continue est donné dans [Ra-Ze], ils reçoivent ici une nouvelle interprétation combinatoire dans le modèle des escaliers (cf. Proposition 16).

Après avoir exposé quelques préliminaires sur les *matrices de Seidel* au paragraphe 5, nous faisons, au paragraphe 6, une étude analogue pour les polynômes $D_n(x)$ et montrons que les polynômes $D_n(x)$ ont eux-mêmes deux spécialisations déjà introduites par Dumont [Du4]:

$$L_n = D_n(-1/2), \qquad R_n = D_n(1/2),$$

appelés nombres d'*Euler médians*. Nous en proposons deux autres

$$l_n = 2^{-n}D_n(0), \qquad r_n = 2^{-n}D_n(1),$$

dont les fonctions génératrices admettent des développements en fractions continues *trop* régulières pour ne pas receler des propriétés algébriques et combinatoires intéressantes (cf. Proposition 29).

Dans le paragraphe 7 nous retrouvons une *extension* (*nouvelle*) *polynômiale* des *nombres de Springer* S_n $(n \geq 1)$ en considérant une matrice de Seidel dont la suite *finale* est la suite $(2^{2n}D_n(x))$ $(n \geq 0)$. Nous montrons alors que la suite *initiale* $(S_n(x))$ $(n \geq 0)$ de cette matrice satisfont

$$S_{2n} = S_n(-1/2), \qquad S_{2n+1} = S_n(1/2) \qquad (n \geq 1).$$

Nous déduisons ensuite de cette construction une interprétation des polynômes $S_n(x)$, donc aussi des nombres de Springer S_n.

2. ETUDES DES POLYNÔMES $Q_n(x, y, z)$

Les premières valeurs des polynômes $Q_n(x, y, z)$ sont

$$\begin{aligned}
Q_0(x, y, z) &= 1, \\
Q_1(x, y, z) &= xy, \\
Q_2(x, y, z) &= xy(xy + z), \\
Q_3(x, y, z) &= xy\left[x^2y^2 + 3xyz + z^2 + xz + yz + z\right].
\end{aligned}$$

Comme Carlitz [Ca2], on se propose d'abord de trouver une formule explicite pour $Q_n(x, y, z)$. Posons

$$(x)_0 = 1, \qquad (x)_n = x(x+1)\cdots(x+n-1) \qquad \text{pour } n \geq 1.$$

PROPOSITION 1. *On a*

$$\sum_{n\geq 0} Q_n(x, y, z)t^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(x)_n(z)_n t^n}{\prod_{k=0}^{n}[1 + (x+k)(z-y+k)t]}. \quad (2.1)$$

Démonstration. Soit $Q(x, y, z; t) = \sum_{n \geq 0} Q_n(x, y, z) t^n$ la série génératrice ordinaire des $Q_n(x, y, z)$. On déduit de la relation de récurrence (1.2) que

$$(1 + x(z - y)t) Q(x, y, z; t) = 1 + xzt Q(x + 1, y, z + 1; t). \quad (2.2)$$

Par suite,

$$Q(x, y, z; t) = \frac{1}{1 + x(z - y)t} + \frac{xzt}{1 + x(z - y)t} Q(x + 1, y, z + 1; t)$$

et par itération on obtient la formule. ∎

PROPOSITION 2. *Les polynômes* $Q_n(x, y, z)$ $(n \geq 0)$ *ont l'expression explicite suivante*:

$$Q_n(x, y, z) = (x)_n (z)_n \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} (-1)^{n-k} \times \frac{(x + z - y + 2k)(x + k)^n (z - y + k)^n}{k!(j - k)!(x + z - y + k)_{j+1}}.$$

Démonstration. Décomposant la fraction rationnelle dans le second membre de (2.1) en éléments simples, nous obtenons

$$\frac{t^j}{\prod_{k=0}^{j} [1 + (x + k)(z - y + k)t]} = \sum_{l=0}^{j} \frac{\alpha_l(j)}{1 + (x + l)(z - y + l)t},$$

où la valeur de $\alpha_l(j)$ est donnée par

$$\alpha_l(j) = \frac{(-1)^l (x + z - y + 2l)}{l!(j - l)!(x + z - y + l)_{j+1}} \qquad (j \geq l \geq 0).$$

Par conséquent, le polynôme $Q_n(x, y, z)$ est le coefficient de t^n dans le développement de

$$\sum_{j=0}^{n} (x)_n (z)_n \sum_{l=0}^{j} \frac{\alpha_l(j)}{1 + (x + l)(z - y + l)t}.$$

D'où l'on tire la formule explicite. ∎

Par ailleurs, appliquant un lemme de Wall [Wa] à Éq. (2.2), nous obtenons (cf. [Ze, Ra-Ze]) le développement en fraction continue de la série génératrice ordinaire des polynômes $Q_n(x, y, z)$.

Théorème 3. *On a*

$$\sum_{n\geq 0} Q_n(x,y,z)t^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{xyt}{1-\cfrac{1zt}{1-\cfrac{(x+1)(y+1)t}{1-\cfrac{2(z+1)t}{1-\cfrac{(x+2)(y+2)t}{1-\cfrac{3(z+2)t}{\ddots}}}}}}}.$$

Pour donner une interprétation combinatoire de ces polynômes, nous avons besoin d'introduire quelques notions combinatoires classiques. Rappelons qu'un *escalier* F sur $[2n] := \{1,2,\ldots,2n\}$ est le graphe d'une application *surjective* f de $[2n]$ sur $\{2,4,6,\ldots,2n\}$ telle que pour tout $k \in [2n]$, $f(k) \geq k$. Un point $(k, f(k))$ de F est dit *maximal* si $f(k) = 2n$, est dit *point fixe* s'il n'est pas maximal et si $f(k) = k$ (ce qui implique que k est pair), est dit *surfixe* s'il n'est pas maximal et si $f(k) = k+1$ (ce qui implique que k est impair). On note $\max F$ le nombre des points maximaux de F à l'exception des points $(2n-1, 2n)$ et $(2n, 2n)$, $\mathrm{fix}\, F$ (resp. $\mathrm{sur}\, F$) le nombre de ses points fixes (resp. surfixes).

Etant donné un escalier F sur $[2n]$, un point $(k, f(k))$ de F est dit *doublé* s'il n'est pas seul sur sa ligne, c'est-à-dire s'il existe $j \neq k$ tel que $f(j) = f(k)$. Nous notons respectivement $\mathrm{mp}\, F$ et $\mathrm{mi}\, F$ le nombre de ses points *maximaux d'abcisses paires* $\neq 2n$ et celui de ses points *maximaux d'abscisses impaires* $\neq 2n-1$, on note $\mathrm{fd}\, F$ (resp. $\mathrm{fnd}\, F$) le nombre de ses points *fixes doublés* (resp. *non doublés*), enfin on note $\mathrm{sd}\, F$ (resp. $\mathrm{snd}\, F$) le nombre de ses points *surfixes doublés* (resp. *non doublés*).

Par exemple, dans l'escalier F de taille 14 suivant:

14								×		×	×		×	×
12					×							×		
10							×		×					
8		×												
6						×								
4			×	×										
2	×													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

les six statistiques sont respectivement les suivantes:

$$\mathrm{mi}\,F = 1, \qquad \mathrm{mp}\,F = 2, \qquad \mathrm{fd}\,F = 2, \qquad \mathrm{fnd}\,F = 1,$$
$$\mathrm{sd}\,F = 2, \qquad \mathrm{snd}\,F = 1.$$

Soit $\mathscr{E}_{2n}$ l'ensemble des escaliers sur $[2n]$ et $\mathscr{E}^*_{2n}$ l'ensemble des escaliers sans *point fixe* sur $[2n]$. Il est bien connu (voir [Du1, Vi]) que le cardinal de $\mathscr{E}_{2n}$ est égal au nombre de Genocchi G_{2n+2}. Dans [Du3], Dumont a introduit les polynômes générateurs de $\mathscr{E}_{2n}$ suivants:

$$\Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sum_{F \in \mathscr{E}_{2n}} x^{\mathrm{mi}\,F} y^{\mathrm{fd}\,F} x^{\mathrm{snd}\,F} \bar{x}^{\mathrm{mp}\,F} \bar{y}^{\mathrm{fnd}\,F} \bar{z}^{\mathrm{sd}\,F} \tag{2.3}$$

et a conjecturé le développement en fraction continue de leur série génératrice ordinaire (cf. (1.4)). Au cours de la démonstration de cette conjecture (cf. [Ra, Ze]), nous avons établi la relation de récurrence suivante pour ces polynômes:

$$\begin{aligned} &\Gamma_1(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 1, \\ &\Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (x + \bar{z})(y + \bar{x})\Gamma_{n-1}(x + 1, y, z, \bar{x} + 1, \bar{y}, \bar{z}) \\ &\qquad + [x(\bar{y} - y) - \bar{x}(\bar{z} - z) - x\bar{x}] \\ &\qquad \times \Gamma_{n-1}(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Comparant (1.2) et (2.4), on voit que

$$Q_n(x, y, z) = \Gamma_{n+1}(z, 0, y, x, 0, 0) \qquad (n \geq 1). \tag{2.5}$$

Il vient donc de (2.3) l'interprétation suivante:

$$Q_n(x, y, z) = \sum_F x^{\mathrm{mp}\,F} y^{\mathrm{snd}\,F} z^{\mathrm{mi}\,F} \qquad (F \in \mathscr{E}^*_{2n+2} \text{ et sd } F = 0). \tag{2.6}$$

Or, d'après (1.3), on aura plutôt besoin d'interpréter des cas particuliers des polynômes $Q_n(x, y, \bar{x} + \bar{y})$ $(n \geq 1)$ dans la suite. Soit

$$P_n(x, y, \bar{x}, \bar{y}) = Q_n(x, y, \bar{x} + \bar{y}) \qquad (n \geq 0). \tag{2.7}$$

Il vient alors de (1.2) la récurrence suivante:

$$\begin{aligned} &P_0(x, y, \bar{x}, \bar{y}) = 1, \\ &P_n(x, y, \bar{x}, \bar{y}) = x(\bar{x} + \bar{y})P_{n-1}(x + 1, y, \bar{x} + 1, \bar{y}) \\ &\qquad - x(\bar{x} + \bar{y} - y)P_{n-1}(x, y, \bar{x}, \bar{y}). \end{aligned} \tag{2.8}$$

PROPOSITION 4. *Pour tout $n \geq 1$, on a*

(i) $\Gamma_n(\bar{x}, \bar{z}, \bar{y}, x, z, y) = \Gamma_n(x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$,

(ii) $\Gamma_{n+1}(x, 0, z, \bar{x}, 0, \bar{z}) = \bar{x}z\Gamma_n(\bar{x}, \bar{z}, 1, x, z, 1)$.

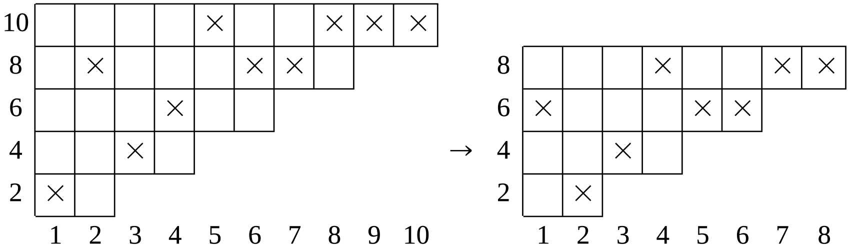
Démonstration. C'est une conséquence immédiate de (2.4). Nous donnons dans la suite une preuve directe à partir de (2.3).

(i) Soit l'aplication ψ de $\mathscr{E}_{2n}$ dans $\mathscr{E}_{2n}$, qui à $F = \{(k, f(k))\}$ associe $G = \{(k, g(k))\}$ telle que pour tout $k \in [n]$, $g(2k) = f(2k-1)$ et $g(2k-1) = f(2k)$. Il est clair que ψ est une involution de $\mathscr{E}_{2n}$ et satisfait

$$\mathrm{mp}\, G = \mathrm{mi}\, F, \qquad \mathrm{mi}\, G = \mathrm{mp}\, F, \qquad \mathrm{fd}\, G = \mathrm{sd}\, F, \qquad \mathrm{fnd}\, G = \mathrm{snd}\, F.$$

D'où l'identité (i) d'après la définition (2.3).

(ii) Soit F un escalier sans point fixe sur $[2n+2]$. Nous supprimons la ligne et la colonne de son point surfixe $(1, 2)$ qui, en dehors de ce point, sont vides, nous supprimons de même les cases vides $(2, 2), (4, 4), \ldots, (2n, 2n)$ ainsi que la case $(2n+2, 2n+2)$. Après renumérotage des lignes et colonnes, la trace de F sur les cases restantes constitue un escalier G sur $[2n]$, comme le montre la figure ci-après:



Nous vérifions sans peine que l'application $F \to G$ ainsi définie établit une bijection entre $\mathscr{E}^*_{2n+2}$ et $\mathscr{E}_{2n}$ telle que

$$\mathrm{mi}\, F = \mathrm{mp}\, F - 1, \qquad \mathrm{mp}\, G = \mathrm{mi}\, F,$$
$$\mathrm{fnd}\, G = \mathrm{snd}\, F - 1, \qquad \mathrm{fd}\, G = \mathrm{sd}\, F.$$

D'où l'identité (ii). ∎

Comparant les deux relations de récurrence (2.4) et (2.8) et en vertu de la Proposition 4, nous obtenons le corollaire suivant.

COROLLAIRE 5. *On a*

$$\begin{aligned} P_n(x, y, \bar{x}, \bar{y}) &= \Gamma_{n+1}(\bar{x}, 0, y, x, 0, \bar{y}) \\ &= xy\Gamma_n(\bar{x}, 1, y, x, 1, \bar{y}) \\ &= xy\Gamma_n(x, \bar{y}, 1, \bar{x}, y, 1). \end{aligned}$$

Par suite, nous déduisons du Corollaire 5 et de (2.3) les interprétations combinatoires suivantes pour les polynômes $P_n(x, y, \bar{x}, \bar{y})$.

THÉORÈME 6. *On a*

$$\begin{aligned} P_n(x, y, \bar{x}, \bar{y}) &= \sum_{F \in \mathscr{E}^*_{2n+2}} x^{\operatorname{mp} F} \bar{x}^{\operatorname{mi} F} y^{\operatorname{snd} F} \bar{y}^{\operatorname{sd} F} \\ &= \sum_{F \in \mathscr{E}_{2n}} x^{\operatorname{mp} F + 1} \bar{x}^{\operatorname{mi} F} y^{\operatorname{snd} F + 1} \bar{y}^{\operatorname{sd} F} \\ &= \sum_{F \in \mathscr{E}_{2n}} x^{\operatorname{mi} F + 1} \bar{x}^{\operatorname{mp} F} y^{\operatorname{fnd} F + 1} \bar{y}^{\operatorname{fd} F}. \end{aligned}$$

On notera que le théorème ci-dessus sera la base de nombreuses interprétations combinatoires des spécialisations des polynômes $Q_n(x, y, z)$ en vertu de (2.7).

3. POLYNÔMES EULÉRIENS

Pour tout polynôme $P(x, y)$ en les variables x et y, notons $\Omega(P(x, y))$ la somme des termes du plus haut degré de $P(x, y)$. Posons

$$A_n(x, y) = \Omega\big(yP_n(x, 1, y, 1)\big) = \Omega\big(yP_n(1, x, 1, y)\big) \qquad (n \geq 1). \quad (3.1)$$

La deuxième égalité provient du fait que d'après le Théorème 3, les $P_n(x, y, \bar{x}, \bar{y})$ sont symétriques en x et y d'une part, et en $\bar{x}$ et $\bar{y}$ d'autre part.

PROPOSITION 7. *Les polynômes $A_n(x, y)$ sont eulériens, i.e., satisfont la relation de récurrence*:

$$\begin{aligned} A_1(x, y) &= xy, \\ A_n(x, y) &= xy\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) A_{n-1}(x, y). \end{aligned} \qquad (3.2)$$

Démonstration. Remarquons d'abord que si l, m sont deux entiers positifs, alors

$$\begin{aligned} \Omega\left[(x+1)^l (y+1)^m - (x)^l (y)^m\right] &= lx^{l-1} y^m + mx^l y^{m-1} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) x^l y^m. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\Omega\big[(y+1)P_n(x+1,1,y+1,1)-yP_n(x,1,y,1)\big]$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)A_n(x,y).$$

Or, d'après (2.8), nous avons

$$\Omega\big(yP_{n+1}(x,1,y,1)\big)$$
$$=xy\Omega\big[(y+1)P_n(x+1,1,y+1,1)-yP_n(x,1,y,1)\big].$$

D'où la récurrence (3.2) ∎

Nous déduisons aisément du Théorème 3 le résultat de Dumont [Du2] suivant.

PROPOSITION 8. *La série génératrice ordinaire des polynômes $A_n(x,y)$ admet le développement en fraction continue suivant*:

$$y+\sum_{n\geq 1}A_n(x,y)t^n=\cfrac{y}{1-\cfrac{1xt}{1-\cfrac{1yt}{1-\cfrac{2xt}{1-\cfrac{2yt}{1-\cfrac{3xt}{1-\cfrac{3yt}{\ddots}}}}}}}.$$

Démonstration. Le polynôme $P_n(x,1,y,1)$ étant de degré n en x et y, donc $Q_n(x,y,a)=a^nyP_n(x/a,1,y/a,1)$ est un polynôme en x, y et a, et satisfait $Q_n(x,y,0)=\Omega(yP_n(x,1,y,1))$. D'où la formule d'après (3.1) et le Théorème 3. ∎

A leur tour on déduit du Théorème 5 les interprétations combinatoires suivantes, qui mettent en évidence la symétrie en x, y de $A_n(x,y)$.

PROPOSITION 9. *On a*

$$A_n(x,y)=\sum_{\substack{F\in\mathscr{E}_{2n}\\ \max F=n-1}}x^{\operatorname{mp}F+1}y^{\operatorname{mi}F+1}=\sum_{\substack{F\in\mathscr{E}_{2n}\\ \max F=n-1}}x^{\operatorname{mi}F+1}y^{\operatorname{mp}F+1}$$
$$=\sum_{\substack{F\in\mathscr{E}_{2n}\\ \operatorname{fix}F=n-1}}x^{\operatorname{fnd}F+1}y^{\operatorname{fd}F+1}=\sum_{\substack{F\in\mathscr{E}_{2n}\\ \operatorname{sur}F=n-1}}x^{\operatorname{snd}F+1}y^{\operatorname{sd}F+1}.$$

Soit $\mathscr{E}'_{2n}$ l'ensemble des escaliers F sur $[2n]$ tels que $\max F = n-1$ et $\operatorname{Inj}(n)$ l'ensemble des injections g de $[n]$ dans $[2n]$ telles que $g(j) \leq 2j$ pour tout $j \in [n]$. Pour $g \in \operatorname{Inj}(n)$, notons $\operatorname{pair}(g)$ (resp. $\operatorname{impair}(g)$) le nombre des entiers $j \in [n]$ tels que $g(j)$ soit pair (resp. impair).

PROPOSITION 10. *On a*

$$A_n(x,y) = \sum_{g \in \operatorname{Inj}(n-1)} x^{\operatorname{pair}(g)+1} y^{\operatorname{impair}(g)+1}.$$

Démonstration. On va construire une bijection entre $\operatorname{Inj}(n-1)$ et $\mathscr{E}'_{2n}$. Etant donné $g \in \operatorname{Inj}(n-1)$, on définit son image $F = \{(k, f(k))\}$ de la manière suivante. Pour tout $k \in [2n]$, s'il existe $j \in [n-1]$ tel que $g(j) = k$, on définit $f(k) = 2j$, sinon on pose $f(k) = 2n$. D'une part, comme $g(j) \leq 2j$ pour tout $j \in [n-1]$, $f(k) \geq k$ pour tout $k \in [2n]$. D'autre part, il y a $\operatorname{pair}(g)$ entiers pairs j tels que $g(j)$ soit pair et $\operatorname{impair}(g)$ entiers impairs j tels que $g(j)$ soit impair, donc $\operatorname{mp} F = n-1 - \operatorname{pair}(g) = \operatorname{impair}(g)$ et $\operatorname{mi} F = n-1-\operatorname{impair}(g) = \operatorname{pair}(g)$. On vérifie facilement que c'est bien une application bijective de $\operatorname{Inj}(n-1)$ sur $\mathscr{E}'_{2n}$. D'où le résultat en vertu du Corollaire 9. ∎

Soit EX_n l'ensemble des applications excédantes f de $[n]$ dans $[n]$, i.e., $f(k) \geq k$ pour tout $k \in [n]$. On note $\operatorname{car} f$ le cardinal de l'ensemble $f([n])$. On peut aussi interpréter $A_n(x,y)$ en terme d'applications excédantes.

PROPOSITION 11. *On a*

$$A_n(x,y) = \sum_{f \in EX_n} x^{\operatorname{car} f} y^{n - \operatorname{car} f + 1}$$

Démonstration. D'après le Corollaire 9,

$$A_n(x,y) = \sum_{\substack{F \in \mathscr{E}_{2n} \\ \operatorname{fix} F = n-1}} x^{\operatorname{fnd} F + 1} y^{\operatorname{fd} F + 1}.$$

Soit donc $F \in \mathscr{E}_{2n}$ tel que $\operatorname{fix} F = n-1$. Supprimons toutes les colonnes paires où seules les cases $(2,2), (4,4), \ldots, (2n,2n)$ ne sont pas vides. La trace de F sur les cases restantes, après renumérotage des colonnes restantes et lignes par $1,2,\ldots,n$, constitue le graphe d'une application excédante g (non necessairement surjective) de $[n]$. L'application $F \to g$ est bien une bijection de $\mathscr{E}_{2n}$ sur EX_n telle qu' une ligne vide de g correspond à un point fixe non doublé de F. D'où le résultat. ∎

Soit $\operatorname{Invbip}(2n)$ l'ensemble des involutions sans point fixe de $[2n]$ dont chaque cycle est composé de deux entiers de parités différentes. Pour $\sigma \in \operatorname{Invbip}(2n)$, une valeur $x \in [2n]$ est dit *pic de cycle* de σ si $\sigma^{-1}(x) <$

$x > \sigma(x)$. Nous notons $i(\sigma)$ (resp. $p(\sigma)$) le nombre de pics de cycle impairs (resp. pairs) de σ. Dumont [Du2] a montré que $A_n(x, y)$ $(n \geq 1)$ sont des polynômes générateurs des $\mathrm{Invbip}(2n)$ selon leurs nombres de pics de cycle pairs et impairs, i.e.,

$$A_n(x, y) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Invbip}(2n)} x^{\mathrm{p}(\sigma)} y^{\mathrm{i}(\sigma)+1}. \tag{3.3}$$

Nous nous proposons de rétablir ce résultat en exhibant une bijection entre ce modèle et l'un des modèles précédents. Par abus de langage, nous identifions dans la suite un escalier et son application correspondante.

PROPOSITION 12. *Il existe une bijection entre* $\mathscr{E}'_{2n}$ *et* $\mathrm{Invbip}(2n)$ *telle que*

$$\mathrm{mp}\, F + 1 = \mathrm{p}(\varphi(F))$$
$$\mathrm{mi}\, F + 1 = \mathrm{i}(\varphi(F)) + 1.$$

Démonstration. Pour tout $F \in \mathscr{E}'_{2n}$, notons F_i la restriction de F à [2i] pour $i = 1, 2, \ldots, n$, c'est-à-dire, pour $1 \leq k \leq 2i$, $F_i(k) = \inf\{F(k), 2i\}$. Signalons tout d'abord que, pour $1 \leq j < i \leq n$, $2j$ n'a qu'un seul antécédent par F_i que nous notons $F_i^{-1}(2j)$. Nous allons construire successivement par récurrence la suite $(\varphi(F_i))$ $(1 \leq i \leq n)$ de sorte que $\varphi(F_i)$ satisfait la relation suivante pour $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} \mathrm{mp}(F_i) + 1 &= \mathrm{p}(\varphi(F_i)) \\ \mathrm{mi}(F_i) + 1 &= \mathrm{i}(\varphi(F_i)) + 1. \end{aligned} \tag{3.4}$$

On définit d'abord $\varphi(F_1) = (1, 2)$ et, pour $i = 1, 2, \ldots, n$, si $k = F_{i+1}^{-1}(2i)$ est un pic de cycle impair (resp. pair) de $\varphi(F_i)$, alors $\varphi(F_{i+1})$ se déduit de $\varphi(F_i)$ en supprimant le cycle (k', k) et en le remplaçant par les deux cycles $(k', 2i+1)$ et $(k, 2i+2)$ (resp. $(k', 2i+2)$ et $(k, 2i+1)$); sinon on ajoute le cycle $(2i+1, 2i+2)$. Il est clair que l'application φ ainsi définie vérifie la relation (3.4). Montrons que c'est bien une bijection de $\mathscr{E}'_{2n}$ sur $\mathrm{Invbip}(2n)$. Pour cela, soit $\sigma \in \mathrm{Invbip}(2n)$ et, pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, σ_i sa restriction à [2i], c'est-à-dire, si $(2i+1, 2i+2)$ (resp. $(k, 2i+1)$ et $(k', 2i+2)$) est un cycle (resp. sont des cycles) de σ_{i+1}, alors σ_i se déduit de celle-ci en supprimant ce cycle (resp. en supprimant ces cycles puis en les remplaçant par (k, k')). On construit la suite d'escaliers $(F_1, F_2, \ldots, F_n)$ comme suit:

(i) $F_1 = \binom{1\ 2}{2\ 2}$,

(ii) $F_{i+1}^{-1}(2j) = F_i^{-1}(2j)$ pour $1 \leq j < i \leq n-1$,

(iii) si $(k, 2i+1)$ et $(k', 2i+2)$ sont des cycles de σ_{i+1}, $F_{i+1}^{-1}(2i) = \sup\{k, k'\}$,

(iv) si $(2i+1, 2i+2)$ est un cycle de σ_{i+1}, $f_{i+1}^{-1}(2i)$ est le seul élément de $[2i]$ différent de $F_i^{-1}(2j)$ $(j = 1, 2, \ldots, i-1)$ et qui n'est pas un pic de σ_i,

(v) Pour tout $j \neq F_{i+1}^{-1}(2k)$ quel que soit $k \leq i$, $F_{i+1}(j) = 2i+2$.

L'application $\sigma \to F = F_n$ ainsi définie est clairement l'inverse de φ. ∎

EXEMPLE. Soit l'escalier (ou application) sur [10]

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 2 & 10 & 4 & 10 & 6 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix},$$

le déroulement de la bijection φ est décrit dans le tableau suivant:

i	F_i	$\varphi(F_i)$
1	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$	$(1,2)$
2	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$	$(1,4)(2,3)$
3	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 6 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$	$(1,6)(2,3)(4,5)$
4	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 8 & 4 & 8 & 6 & 8 & 8 \end{pmatrix}$	$(1,8)(2,3)(4,5)(6,7)$
5	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 2 & 10 & 4 & 10 & 6 & 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$	$(1\,8)(2,3)(4,5)(6,7)(9,10)$

Nous trouvons alors $\varphi(F) = (1,8)(2,3)(4,5)(6,7)(9,10)$.

4. NOMBRES D'EULER ET DE GENOCCHI

Dumont et Randrianarivony [Du-Ra] ont introduit une suite de polynômes $(B_n(x,y))$ $(n \geq 1)$ comme une extension commune des nombres de Genocchi et des nombres de Genocchi médians en ce sens que

$$G_{2n} = B_n(1,1), \qquad H_{2n-1} = B_n(0,1) \qquad (n \geq 1). \tag{4.1}$$

Ces polynômes sont définis par

$$\begin{aligned} &B_1(x,y) = 1, \\ &B_n(x,y) = (x+1)(y+1)B_{n-1}(x+1, y+1) - xyB_{n-1}(x,y). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Comparant avec (2.8) nous constatons que

$$B_n(x,y) = x^{-1}P_n(x,1,y,1) \qquad (n \geq 1).$$

D'après Théorème 3 nous retrouvons immédiatement le résultat de Dumont et Randrianarivony [Du-Ra] suivant.

PROPOSITION 13. *On a*

$$1 + x\sum_{n\geq 1} B_n(x,y)t^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{1xt}{1 - \cfrac{1(y+1)t}{1 - \cfrac{2(x+1)t}{1 - \cfrac{2(y+2)t}{1 - \cfrac{3(x+2)t}{1 - \cfrac{3(y+3)t}{\ddots}}}}}}}.$$

D'autre part, le Théorème 6 implique immédiatement les interprétations combinatoires suivantes pour $B_n(x,y)$, dont les deux dernières sont déjà établies dans [Du-Ra].

PROPOSITION 14. *On a*

$$\begin{aligned} B_n(x,y) &= \sum_{F\in\mathscr{E}^*_{2n+2}} x^{\mathrm{mp}\,F-1} y^{\mathrm{mi}\,F} \\ &= \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n}} x^{\mathrm{mp}\,F} y^{\mathrm{mi}\,F} \\ &= \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n}} x^{\mathrm{mi}\,F} y^{\mathrm{mp}\,F}. \end{aligned}$$

D'après (4.1), nous retrouvons en particulier les interprétations pour les nombres de Genocchi et Genocchi médians dans [Du-Ra, Ra].

Par ailleurs, Randrianarivony et Zeng [Ra-Ze] ont introduit les polynômes $C_n(x,y)$ $(n \geq 1)$ comme une extension des nombres d'Euler E_n en ce sens que

$$C_n(1,1) = E_{2n}, \qquad C_n(2,2) = E_{2n+1}. \tag{4.3}$$

Ces polynômes sont définis par

$$\begin{aligned} &C_0(x,y) = 1, \\ &C_n(x,y) = x(y+1)C_{n-1}(x+2,y+2) - xyC_{n-1}(x,y). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Comparant avec (2.8) nous voyons que

$$C_n(x,y) = 2^{2n}P_n(x/2, 1/2, y/2, 1/2), \qquad (n \geq 0).$$

Le résultat suivant, déjà établi dans [Ra-Ze], s'obtient facilement du Théoréme 3.

PROPOSITION 15. *On a*

$$\sum_{n\geq 0} C_n(x,y)t^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{1xt}{1-\cfrac{2(y+1)t}{1-\cfrac{3(x+2)t}{1-\cfrac{4(y+3)t}{1-\cfrac{5(x+4)t}{1-\cfrac{6(y+5)t}{\ddots}}}}}}}.$$

De méme on peut déduire du Théorème 6 des interprétations en termes d'escaliers pour $C_n(x,y)$. Pour ce faire, on pose, pour tout escalier F sur $[2n]$,

$$\begin{aligned} \operatorname{nf} F &= 2n-2-\operatorname{fix} F, \qquad \operatorname{ns} F = 2n-2-\operatorname{sur} F,\\ \operatorname{nmf} F &= 2n-2-\max F-\operatorname{fix} F,\\ \operatorname{nms} F &= 2n-2-\max F-\operatorname{sur} F. \end{aligned} \tag{4.5}$$

PROPOSITION 16. *On a*

$$\begin{aligned} C_n(x,y) &= \sum_{F\in\mathscr{E}^*_{2n+2}} 2^{\operatorname{nms} F} x^{\operatorname{mp} F} y^{\operatorname{mi} F}\\ &= \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n}} 2^{\operatorname{nms} F} x^{\operatorname{mp} F+1} y^{\operatorname{mi} F}\\ &= \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n}} 2^{\operatorname{nmf} F} x^{\operatorname{mi} F+1} y^{\operatorname{mp} F}. \end{aligned}$$

En tenant compte de (4.3), on obtient des nouvelles interprétations combinatoires pour les nombres d'Euler (E_n) $(n\geq 1)$.

COROLLAIRE 17. *On a, pour* $n\geq 0$,

$$E_{2n} = \sum_{F\in\mathscr{E}^*_{2n+2}} 2^{\operatorname{nms} F} = \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n}} 2^{\operatorname{nms} F} = \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n}} 2^{\operatorname{nmf} F},$$

$$E_{2n+1} = \sum_{F\in\mathscr{E}^*_{2n+2}} 2^{\operatorname{ns} F-2} = \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n}} 2^{\operatorname{ns} F-1} = \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n}} 2^{\operatorname{nf} F-1}.$$

On remarque notamment que le fait que les nombres E_{2n} sont impairs et les nombres E_{2n+1} sont pairs pour $n\geq 0$ est une conséquence immédiate du corollaire ci-dessus.

Dans [Ra-Ze], nous avons donné une interprétation pour les polynômes $C_n(x, y)$ en termes de *records pairs* et *records impairs* de permutations alternantes sur $[2n]$. Le problème qui reste ouvert est de trouver une bijection entre cette interprétation et celle de la Proposition 16.

5. MATRICES DE SEIDEL

Une matrice infinie $(a_{n,k})_{n,k\geq 0}$ est dite matrice de Seidel si les coefficients satisfont la récurrence:

$$a_{n+1,k} = a_{n,k} + a_{n,k+1}, \qquad n, k \geq 0. \tag{5.1}$$

La suite $\{a_{0,n}\}_{n\geq 0}$ (resp. $\{a_{n,0}\}_{n\geq 0}$) est appelée *suite initiale* (resp. *finale*) de la matrice de Seidel. Il est clair qu'une matrice de Seidel est entièrement déterminée par sa suite initiale ou finale. En effet, il est facile de vérifier qu'on a

$$a_{n,k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_{0,k+i}, \qquad a_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} a_{n+i,0}, \qquad n, k \geq 0. \tag{5.2}$$

Il résulte de (5.2) que si (a_n) et $(\bar{a}_n)$ $(n \geq 0)$ sont respectivement les suites initiale et finale d'une matrice de Seidel $(a_{n,k})_{n,k\geq 0}$, alors $\{(-1)^n \bar{a}_n\}$ et $\{(-1)^n a_n\}$ $(n \geq 0)$ sont respectivement les suites initiale et finale de la matrice de Seidel $((-1)^{n+k} a_{n,k})_{n,k\geq 0}$.

LEMME 18. *Soient $a(t) = \sum_{n\geq 0} a_{0,n} t^n$ et $\bar{a}(t) = \sum_{n\geq 0} a_{n,0} t^n$ les fonctions génératrices ordinaires des suites initiale et finale d'une matrice de Seidel $(a_{n,k})_{n,k\geq 0}$. Si $\bar{a}(t)$ admet le développement en fraction continue formelle*

$$\bar{a}(t) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{c_1 t}{1 - \cfrac{c_2 t}{1 - \cfrac{c_3 t}{1 - \cfrac{c_4 t}{\ddots}}}}},$$

alors $a(t)$ *a le développement en fraction continue formelle suivant*:

$$a(t) = \cfrac{1}{1+t-\cfrac{c_1 t}{1-\cfrac{c_2 t}{1+t-\cfrac{c_3 t}{1-\cfrac{c_4 t}{\ddots}}}}}.$$

Démonstration. D'après (5.2) nous avons

$$a(t) = \frac{1}{1+t}\bar{a}\left(\frac{t}{1+t}\right), \qquad \bar{a}(t) = \frac{1}{1-t}a\left(\frac{t}{1-t}\right). \tag{5.3}$$

D'où nous déduisons aisément le résultat. ∎

Soit p un entier positif fixe et

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_p), \qquad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_p).$$

Considérons une matrice de Seidel $(a_{n,k}(\mathbf{x}))_{n,k\geq 0}$ paramétrisée par $\mathbf{x}$ et ayant respectivement $a_n(\mathbf{x}) = a_{0,n}(\mathbf{x})$ et $\bar{a}_n(\mathbf{x}) = a_{n,0}(\mathbf{x})$ pour suite initiale et suite finale.

PROPOSITION 19. *Soient* α, β *deux paramètres indépendants de* $n \geq 0$. *La suite initiale* $\{a_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ *satisfait la récurrence*

$$a_n(\mathbf{x}) = \alpha a_{n-1}(\mathbf{x}+\mathbf{a}) + \beta a_{n-1}(\mathbf{x}) \qquad (n \geq 1), \tag{5.4}$$

avec $a_0(\mathbf{x}) = 1$, *si et seulement si la suite finale* $\{\bar{a}_n(\mathbf{x})\}_{n\geq 0}$ *satisfait la récurrence*

$$\bar{a}_n(\mathbf{x}) = \alpha \bar{a}_{n-1}(\mathbf{x}+\mathbf{a}) + (\beta+1)\bar{a}_{n-1}(\mathbf{x}) \qquad (n \geq 1), \tag{5.5}$$

avec $\bar{a}_0(\mathbf{x}) = 1$.

Démonstration. C'est évident d'après (5.2). ∎

PROPOSITION 20. *Si* $\{(ab)^{-n}P_n(x, y, \bar{x}, \bar{y})\}_{n\geq 0}$ *est la suite initiale d'une matrice de Seidel, alors* $\{(ab)^{-n}\Gamma_{n+1}(x-a, \bar{y}+b, 0, \bar{x}-b, y, a)\}_{n\geq 0}$ *est la suite finale de cette matrice de Seidel.*

Démonstration. Posons $a_n(x, y, \bar{x}, \bar{y}) = (ab)^{-n}P_n(x, y, \bar{x}, \bar{y})$. D'après (2.8), les polynômes $a_n(x, y, \bar{x}, \bar{y})$ satisfont la récurrence:

$$\begin{aligned} a_n(x, y, \bar{x}, \bar{y}) = {} & (ab)^{-1}x(\bar{x}+\bar{y})a_{n-1}(x+1, y, \bar{x}+1, \bar{y}) \\ & -(ab)^{-1}x(\bar{x}+\bar{y}-y)a_{n-1}(x, y, \bar{x}, \bar{y}). \end{aligned} \tag{5.6}$$

avec $a_0(x, y, \bar{x}, \bar{y}) = 1$. Donc, d'après la proposition précédente, la suite finale $\{\bar{a}_n(x, y, \bar{x}, \bar{y})\}$ satisfont la récurrence:

$$\begin{aligned} \bar{a}_n(x, y, \bar{x}, \bar{y}) &= (ab)^{-1} x(\bar{x} + \bar{y}) \bar{a}_{n-1}(x+1, y, \bar{x}+1, \bar{y}) \\ &\quad - \left[(ab)^{-1} x(\bar{x} + \bar{y} - y) - 1\right] \bar{a}_{n-1}(x, y, \bar{x}, \bar{y}). \quad (5.7) \end{aligned}$$

avec $\bar{a}_0(x, y, \bar{x}, \bar{y}) = 1$. Or, en vertu de (2.4), la suite $\{(ab)^{-n} \Gamma_{n+1}(x-a, \bar{y}+b, 0, \bar{x}-b, y, a)\}_{n \geq 0}$ vérifie bien la récurrence (5.7). ∎

On en déduit en particulier le résultat suivant dont les détails sont laissés au lecteur.

COROLLAIRE 21. *On note $\{a_n(x, y)\}_{n \geq 0}$ et $\{\bar{a}_n(x, y)\}_{n \geq 0}$ les suites initiale et finale d'une matrice de Seidel*:

Si $a_n(x, y) = xB_n(x, y)$, alors $\bar{a}_n(x, y) = \Gamma_{n+1}(x-1, 2, 0, y-1, 1, 1)$;
si $\bar{a}_n(x, y) = xB_n(x, y)$, alors $a_n(x, y) = \Gamma_{n+1}(x-1, 0, 0, y+1, 1, 1)$;
si $a_n(x, y) = C_n(x, y)$, alors $\bar{a}_n(x, y) = 2^{2n} \Gamma_{n+1}((x-1)/2, 1, 0, (y-1)/2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$;
si $\bar{a}_n(x, y) = C_n(x, y)$, alors $a_n(x, y) = 2^{2n} \Gamma_{n+1}((x-1)/2, 1, 0, (y+1)/2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

En particulier, si la suite finale d'une matrice de Seidel est $\{H_{2n-1}\}_{n \geq 0}$ avec $H_{-1} = 1$, alors la suite initiale dénombre les escaliers F tels que $\mathrm{mi}\, F = \mathrm{fd}\, F = \mathrm{snd}\, F = 0$.

6. NOMBRES D'EULER MÉDIANS

Considérons les matrices de Seidel suivantes:

$$(a_{n,k}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 & 5 & 16 & -61 & -272 & \cdots \\ 1 & 0 & -3 & 3 & 21 & -45 & -333 & \cdots & \\ 1 & -3 & 0 & 24 & -24 & -378 & \cdots & & \\ -2 & -3 & 24 & 0 & -402 & \cdots & & & \\ -5 & 21 & 24 & -402 & \cdots & & & & \\ 16 & 45 & -378 & \cdots & & & & & \\ 61 & -333 & \cdots & & & & & & \\ -272 & \cdots & & & & & & & \\ \cdots & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

et

$$(b_{n,k}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -2 & -5 & 16 & 61 & -272 & \cdots \\ 1 & 2 & -1 & -7 & 11 & 77 & -211 & \cdots & \\ 3 & 1 & -8 & 4 & 88 & -134 & \cdots & & \\ 4 & -7 & -4 & 92 & -46 & \cdots & & & \\ -3 & -11 & 88 & 46 & \cdots & & & & \\ -14 & 77 & 134 & \cdots & & & & & \\ 63 & 211 & \cdots & & & & & & \\ 274 & \cdots & & & & & & & \\ \cdots & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

où les suites initiales sont respectivement

$$a_{0,0} = 0, \qquad a_{2n-1,0} = (-1)^{n-1} E_{2n-1},$$
$$a_{2n,0} = (-1)^n E_{2n} \qquad (n \geq 1),$$
$$b_{0,0} = 0, \qquad b_{2n-1,0} = (-1)^{n-1} E_{2n-1},$$
$$b_{2n,0} = (-1)^{n-1} E_{2n} \qquad (n \geq 1).$$

Inspiré par les travaux d'Arnold [Ar], Dumont [Du2] a récemment proposé d'étudier les coefficients qui se trouvent dans les surdiagonaux de ces deux matrices de Seidel plus haut, i.e.,

$$R_n = (-1)^n a_{n,n+1}, \qquad L_n = (-1)^n b_{n,n+1},$$

et les a appelés *nombres d'Euler médians*.

THÉORÈME 22 (Dumont [Du4]). *On a le développement en fractions continues formelles suivant*:

$$\sum_{n \geq 0} L_n t^n = 1 + t + 4t^2 + 46t^3 + \cdots$$
$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{1 \cdot 1t}{1 - \cfrac{1 \cdot 3t}{1 - \cfrac{2 \cdot 5t}{1 - \cfrac{2 \cdot 7t}{1 - \cfrac{3 \cdot 9t}{1 - \cfrac{3 \cdot 11t}{\ddots}}}}}}},$$

$$\sum_{n \geq 0} R_n t^n = 1 + 3t + 24t^2 + 402t^3 + \cdots$$

$$= \cfrac{1}{1-\cfrac{1\cdot 3t}{1-\cfrac{1\cdot 5t}{1-\cfrac{2\cdot 7t}{1-\cfrac{2\cdot 9t}{1-\cfrac{3\cdot 11t}{1-\cfrac{3\cdot 13t}{\ddots}}}}}}}.$$

Nous allons montrer dans la suite que les polynômes $D_n(x)$ définis par:

$$D_n(x) = 2^{2n}P_n\left(\frac{x+1}{2}, 1, \frac{x+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad (n \geq 0). \tag{6.1}$$

sont une extension des nombres d'Euler médians.

De la relation (2.8) on déduit la relation de récurrence:

$$\begin{aligned} &D_0(x) = 1, \\ &D_n(x) = (x+1)(x+2)D_{n-1}(x+2) - x(x+1)D_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{6.2}$$

Les premières valeurs de ces polynômes sont:

$$\begin{aligned} D_0(x) &= 1, \\ D_1(x) &= 2(x+1), \\ D_2(x) &= 4(x+1)(2x+3), \\ D_3(x) &= 8(x+1)(6x^2+22x+21). \end{aligned}$$

On voit aisément que $D_n(x)$ est un polynôme à coefficients entiers positifs et divisible par $2^n(x+1)$ dans $\mathbb{Z}[x]$. On déduit aussi de la Proposition 1 le résultat suivant.

PROPOSITION 23. *On a*

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} D_n(x)t^n &= \frac{1}{1+x(x+1)t} \\ &\quad + \frac{(x+1)(x+2)t}{(1+x(x+1)t)(1+(x+2)(x+3)t)} + \cdots \\ &= \sum_{n\geq 0} \frac{(x+1)_{2n}t^n}{\prod_{k=0}^{n}[1+(x+2k)(x+2k+1)t]}. \end{aligned}$$

Du Théorème 3 on déduit le développement en fraction continue formelle de la série génératrice ordinaire des polynômes $D_n(x)$ suivant.

THÉORÈME 24. *On a*

$$\sum_{n\geq 0} D_n(x)t^n = \cfrac{1}{1-\cfrac{2(x+1)t}{1-\cfrac{2(x+2)t}{1-\cfrac{4(x+3)t}{1-\cfrac{4(x+4)t}{\ddots}}}}}.$$

Enfin le Théorème 6 implique les interprétations suivantes pour les polynômes $D_n(x)$.

PROPOSITION 25. *On a*

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{F\in\mathscr{E}^*_{2n+2}} 2^{2n-\max F-\operatorname{sd} F}(x+1)^{\max F} \\ &= \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n}} 2^{2n-1-\max F-\operatorname{fd} F}(x+1)^{\max F+1} \\ &= \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n}} 2^{2n-1-\max F-\operatorname{sd} F}(x+1)^{\max F+1}. \end{aligned}$$

THÉORÈME 26. *On a, pour tout $n \geq 0$:*

$$D_n\left(-\tfrac{1}{2}\right) = L_n, \qquad D_n\left(\tfrac{1}{2}\right) = R_n.$$

Démonstration. En substituant x par $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$, respectivement, dans le Théorème 24, on trouve les même fractions continues du Théorème 22. ∎

De la Proposition 25 on obtient les interprétations suivantes.

PROPOSITION 27. *On a*

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{F\in\mathscr{E}^*_{2n+2}} 2^{2(n-\max F)-\operatorname{sd} F} = \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n}} 2^{2(n-1-\max F)-\operatorname{sd} F}, \\ R_n &= \sum_{F\in\mathscr{E}^*_{2n+2}} 2^{2(n-\max F)-\operatorname{sd} F}3^{\max F} = \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n}} 2^{2(n-1-\max F)-\operatorname{sd} F}3^{\max F}. \end{aligned}$$

On voit que les exposants de 2 dans la proposition ci-dessus sont tous positifs ou nuls. Par conséquent, les nombres L_n et R_n sont des entiers

≥ 1. D'autre part, en appliquant la Proposition 1 avec $t = \frac{1}{2}$, on a les expressions suivantes pour les L_n et R_n $(n \geq 1)$.

PROPOSITION 28. *On a*

$$L_n = \sum_{F \in \mathscr{E}^*_{2n+2}} (-1)^{\operatorname{mi} F} 4^{n - \max F} = \sum_{F \in \mathscr{E}_{2n}} (-1)^{\operatorname{mi} F} 4^{n-1-\max F},$$

$$R_n = \sum_{F \in \mathscr{E}^*_{2n+2}} 3^{\operatorname{mp} F} 4^{n - \max F} = \sum_{F \in \mathscr{E}_{2n}} 3^{\operatorname{mp} F + 1} 4^{n-1-\max F}.$$

Nous constatons que les nombres d'Euler médians sont deux spécialisations des polynômes $D_n(x)$. En spécialisant les polynômes $D_n(x)$ de façon différente, nous pouvons obtenir d'autres entiers positifs remarquables. Par exemple, posons

$$l_n = 2^{-n} D_n(0), \qquad r_n = 2^{-n} D_n(1), \qquad n \geq 0;$$

alors le Théorème 24 implique les développements en fractions continues suivants.

THÉORÈME 29. *On a*

$$\sum_{n \geq 0} l_n t^n = 1 + t + 3t^2 + 21t^3 + \cdots$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{1 \cdot 1t}{1 - \cfrac{1 \cdot 2t}{1 - \cfrac{2 \cdot 3t}{1 - \cfrac{2 \cdot 4t}{1 - \cfrac{3 \cdot 5t}{1 - \cfrac{3 \cdot 6t}{\ddots}}}}}}},$$

$$\sum_{n \geq 0} r_n t^n = 1 + 2t + 10t^2 + 98t^3 + \cdots$$

$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{1 \cdot 2t}{1 - \cfrac{1 \cdot 3t}{1 - \cfrac{2 \cdot 4t}{1 - \cfrac{2 \cdot 5t}{1 - \cfrac{3 \cdot 6t}{1 - \cfrac{3 \cdot 7t}{\ddots}}}}}}}.$$

D'après les fractions continues dans les Théorèmes 22 et 29, il semble que les nombres l_n et r_n doivent avoir des propriétés voisines des nombres d'Euler médians. On déduit également de la Proposition 25 les interprétations en escaliers des nombres l_n et r_n suivantes.

THÉORÈME 30. *On a*

$$\begin{aligned} l_n &= \sum_{F \in \mathscr{E}^*_{2n+2}} 2^{n - \max F - \operatorname{sd} F} = \sum_{F \in \mathscr{E}_{2n}} 2^{n-1-\max F - \operatorname{fd} F} \\ &= \sum_{F \in \mathscr{E}_{2n}} 2^{n-1-\max F - \operatorname{sd} F}, \\ r_n &= \sum_{F \in \mathscr{E}^*_{2n+2}} 2^{n - \operatorname{sd} F} = \sum_{F \in \mathscr{E}_{2n}} 2^{n - \operatorname{fd} F} = \sum_{F \in \mathscr{E}_{2n}} 2^{n - \operatorname{sd} F}. \end{aligned}$$

D'autre part, en vertu de (2.7) on a

$$P_n(x, y, \bar{x}, \bar{y}) = P_n\left(x, y, \bar{x} + \tfrac{1}{2}, \bar{y} - \tfrac{1}{2}\right) = P_n\left(x, y, \bar{x} - \tfrac{1}{2}, \bar{y} + \tfrac{1}{2}\right).$$

Par suite, compte tenu de (6.1) et du Théorème 6, on obtient une autre interprétation pour les nombres l_n et r_n.

THÉORÈME 31. *On a*

$$l_n = \sum_{\substack{F \in \mathscr{E}_{2n} \\ \operatorname{fd} F = 0}} 2^{n-1-\operatorname{mi} F}, \qquad r_n = \sum_{F \in \mathscr{E}_{2n}} 2^{n - \operatorname{mp} F}.$$

On remarque que l_n est impair et r_n pair pour tout $n \geq 1$.

7. NOMBRES DE SPRINGER

Les nombres de Springer S_n $(n \geq 0)$ sont définis par leur fonction génératrice exponentielle $(\cos x + \sin x)/\cos 2x$. Nous allons généraliser ces nombres.

Considérons la matrice de Seidel ayant $\{2^{2n} D_n(x)\}$ comme sa suite finale. D'après la Proposition 19 et la relation (6.2), sa suite initiale $\{S_n(x)\}_{n \geq 0}$ est définie par la récurrence:

$$\begin{aligned} S_0(x) &= 1, \\ S_n(x) &= (2x+2)(2x+4) S_{n-1}(x+2) - (2x+1)^2 S_{n-1}(x). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Voici les premières valeurs de ces polynômes:

$$\begin{aligned} S_0(x) &= 1,\\ S_1(x) &= 8x + 7,\\ S_2(x) &= 128x^2 + 304x + 177,\\ S_3(x) &= 3072x^3 + 13952x^2 + 21080x + 10199. \end{aligned}$$

Par un argument analogue à celui de la Proposition 2, on obtient la formule suivante.

PROPOSITION 32. *On a*

$$\sum_{n\geq 0} S_n(x)t^n = \sum_{n\geq 0} \frac{2^{2n}(x+1)_{2n}t^n}{\prod_{k=0}^{n}\{1+[1+(2x+4k)(2x+4k+2)]t\}}.$$

Le théorème suivant se déduit du Théorème 26 et du Lemme 18.

THÉORÈME 33. *La série génératrice ordinaire des polynômes $S_n(x)$ admet le développement en fraction continue*

$$\sum_{n\geq 0} S_n(x)t^n = \cfrac{1}{1+t-\cfrac{4\cdot 2(x+1)t}{1-\cfrac{4\cdot 2(x+2)t}{1+t-\cfrac{4\cdot 4(x+3)t}{1-\cfrac{4\cdot 4(x+4)t}{\ddots}}}}}.$$

Comme dans le cas des $D_n(x)$, on peut aussi interpréter les $S_n(x)$ dans le modèle d'escaliers.

THÉORÈME 34. *On a*

$$S_n(x) = \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n+2}} 3^{\mathrm{fix}\,F}4^{\mathrm{nmfs}\,F}(2x+1)^{\max F}.$$

Démonstration. Il est facile de montrer que les polynômes

$$4^{2n}\Gamma_{n+1}\left(\frac{2x+1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2x+1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

vérifient la récurrence (7.1). D'où le théorème d'après (2.5). ∎

PROPOSITION 35 (Dumont [Du4]). *Si* $\{S_{2n}\}_{n\geq 0}$ (*resp.* $\{S_{2n+1}\}_{n\geq 0}$) *est la suite initiale d'une matrice de Seidel, alors* $\{2^{2n}L_n\}_{n\geq 0}$ (*resp.* $\{2^{2n}R_n\}_{n\geq 0}$)*est la suite finale*.

Par suite, nous avons le résultat suivant en vertu du Théorème 26.

THÉORÈME 36. *On a*

$$S_n(-1/2) = S_{2n}, \qquad S_n(1/2) = S_{2n+1}.$$

On tire alors de la Proposition 32 les fonctions génératrices ordinaires des S_n.

COROLLAIRE 37. *On a*

$$\sum_{n\geq 0} S_{2n}t^n = \sum_{n\geq 0} \frac{\prod_{k=0}^{2n}(2k+1)t^n}{\prod_{k=0}^{n}\{1+[1+(4k+1)(4k+3)]t\}},$$

$$\sum_{n\geq 0} S_{2n+1}t^n = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\prod_{k=1}^{2n}(2k-1)t^n}{\prod_{k=1}^{n}\{1+[1+(4k-1)(4k+1)]t\}}.$$

COROLLAIRE 38. *On a*

$$S_{2n} = \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n}} 3^{\operatorname{fix} F+1}4^{\operatorname{nfs} F-2},$$

$$S_{2n+1} = \sum_{F\in\mathscr{E}_{2n+2}} 2^{\max F}3^{\operatorname{fix} F}4^{\operatorname{nmfs} F}$$

Démonstration. A tout escalier F sur $[2n+2]$ tel que $\max F = 0$, on associe l'escalier G sur $[2n]$ déduit de F par suppression de la ligne supérieure. Ceci établit une bijection entre $\mathscr{E}_{2n}$ et l'ensemble des escaliers F sur $[2n+2]$ tels que $\max F = 0$, ayant la propriété:

$$\operatorname{fix} G = \operatorname{fix} F - 1, \qquad \operatorname{sur} G = \operatorname{sur} F - 1.$$

D'où le résultat en appliquant les Théorèmes 28 et 30. ∎

Dans [Ar], Arnold a donné des interprétations combinatoires des nombres de Springer en terme de *permutations signées alternées*. Donc, le problème ouvert est d'établir des liens entre son modèle et le nôtre.

REFERENCES

[Ar] V. I. Arnold, The calculus of snakes and the combinatorics of Bernoulli, Euler and Springer numbers of Coxeter groups, *Russian Math. Surveys* **47**, No. 1 (1992), 1–51.

[Ca1] L. Carlitz, A conjecture concerning Genocchi numbers, *K. Norske Vidensk. Selsk. Sk.* **9** (1972), 1–4.

[Ca2] L. Carlitz, Explicit formulas for the Dumont−Foata polynomials, *Discrete Math*. **30** (1980), 211−225.

[Du1] D. Dumont, Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi, *Duke Math*. *J*. **41**, No. 2 (1974), 305−318.

[Du2] D. Dumont, Pics de cycle et dérivées partielles, *in* ‘‘Actes du Séminaire lotharingien de Combinatoire, 13^e^ session,’’ Publication IRMA, Strasbourg, 1985.

[Du3] D. Dumont, Conjectures sur des symétries ternaires liées aux nombres de Genocchi, à paraître dans les ‘‘Actes du 4^e^ colloque de séries formelles et combinatoire algebrique,’’ Publ. de l’UQAM, 1992.

[Du4] D. Dumont, Further triangles of Seidel−Arnold type and continued fractions related to Euler and Springer numbers, *Adv*. *App*. *Meth*. **16** (1995), 275−296.

[Du-Fo] D. Dumont et D. Foata, Une propriété de symétrie des nombres de Genocchi, *Bull*. *Soc*. *Math*. *France* **104** (1976), 433−451.

[Du-Ra] D. Dumont et A. Randrianarivony, Sur une extension des nombres de Genocchi, *Europ*. *J*. *Comb*. **16** (1995), 147−151.

[Ga] J. Gandhi, A conjectured representation of Geenocchi numbers, *Amer*. *Math*. *Monthly* **77**, No. 1 (1979), 505−506.

[Ha] G. N. Han, Interprétations combinatoires des nombres de Genocchi et propriétés de symétrie, *in* ‘‘Actes de l’atelier de combinatoire franco-québecois,’’ Publ. de LACIM, Vol. 10 (1992), 119−137.

[Ra] A. Randrianarivony, Polynômes de Dumont−Foata généralisés, à paraître.

[Ra-Ze] A. Randrianarivony et J. Zeng, Sur une extension des nombres d’Euler et les records des permutations alternantes, *J*. *Combin*. *Theory Ser*. *A* **66** (1994),

[Ri-St] J. Riordan et P. Stein, Proof of a conjecture on Genocchi numbers, *Discrete Math*. **5** (1973), 381−388.

[Vi] Viennot, Théorie combinatoire des nombres d’Euler et de Genocchi, *in* ‘‘Séminaire de Théorie des nombres, exposé *n*° 11,’’ Publ. de l’Université de Bordeaux I, 1980.

[Wa] H. S. Wall, Continued fractions and totally monotone sequences, *Trans*. *Amer*. *Math*. *Soc*. **48** (1940), 165−184.

[Ze] J. Zeng, Sur les symétries ternaires des nombres de Genocchi, *Discrete Math*., à paraître.